~~Interesantno je da sinusna i kosinusna funkcija nisu ograničene na kompleksnom domenu.~~ ~~Na primer, ako u izrazu koji definiše sinusnu funkciju, z zamenimo sa ix dobijamo da je $\sin ix = -\frac{1}{i}\text{sh}\, x$, odakle zbog neograničenosti funkcije sh x sledi neograničenost sinusne funkcije. Slično se pokazuje neograničenost kosinusne funkcije.~~

~~c) **Hiperboličke funkcije** se definišu na sledeći način:~~

$$\cancel{\textit{Sinushiperbolička funkcija} \quad \text{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};}$$

$$\cancel{\textit{Kosinushiperbolička funkcija} \quad \text{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};}$$

$$\cancel{\textit{Tangenshiperbolička funkcija} \quad \text{tgh}\, z = \frac{\text{sh}\, z}{\text{ch}\, z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}};}$$

~~Navodimo neke od adicionih formula koje važe za hiperboličke funkcije: $\text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$, $\text{sh}(-z) = -\text{sh}\, z$, $\text{ch}(-z) = \text{ch}\, z$, $\text{tgh}(-z) = -\text{tgh}\, z$, $\text{sh}(z_1 \pm z_2) = \text{sh}\, z_1 \text{ch}\, z_2 \pm \text{ch}\, z_1 \text{sh}\, z_2$, $\text{ch}(z_1 \pm z_2) = \text{ch}\, z_1 \text{ch}\, z_2 \mp \text{sh}\, z_1 \text{sh}\, z_2$.~~

Višeznačne funkcije. Kao motivaciju za posmatranje višeznačnih funkcija razmatraćemo funkciju $f(z) = Arg(z)$. Zbog periodičnosti funkcija $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$, čiji je period 2π iz trigonometrijskog oblika kompleksnog broja zaključujemo da argument kompleksnog broja nije jedinstveno određen, nego je određen do na $2k\pi$ gde je k bilo koji ceo broj. Dakle, ako je $z = re^{i(\varphi+2k\pi)}$ ($\varphi \in [0, 2\pi)$ je fiksirano), tada funkcija $Arg(z) = \varphi + 2k\pi$ promenljivoj z pridružuje beskonačno mnogo različitih realnih vrednosti, i ona predstavlja najelementarniji primer višeznačne (multiformne) funkcije. Vrednosti ove funkcije nazivaćemo glavnim vrednostima ukoliko je $Arg(z) = \varphi \in [0, 2\pi)$ i takvu vrednost argumenta označavaćemo sa $arg(z)$. Postavlja se pitanje da li će vrednosti nekih drugih funkcija zavisiti od izbora vrednosti argumenta ako se nezavisno promenljive zadaju u polarnim koordinatama. Odgovor je naravno potvrdan. Razmotrićemo uticaj izbora argumenta nezavisno promenljive na vrednost korene i logaritamske funkcije.

Elementaran primer višeznačnog preslikavanja je $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$. Kako je svaku tačku kompleksne ravni moguće predstaviti kao $z = re^{i(\varphi+2k\pi)}$, ($k \in \mathbf{Z}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ fiksirano) tada je skup slika ove tačke dat sa $z^{\frac{1}{2}} = \{r^{\frac{1}{2}} e^{(\frac{\varphi}{2}+k\pi)i} | k \in \mathbf{Z}\}$. Vidimo da za $k \in 2\mathbf{Z}$ dobijamo iste vrednosti ove funkcije, a takođe i za $k \in 2\mathbf{Z} - 1$. Stoga, moguće je izdvojiti dve različite vrednosti ove funkcije koje odgovaraju istoj tački.

Ako je $Arg(z) \in [4k\pi, (4k+2)\pi)$ tada se slike nalaze u gornjoj poluravni uključujući i pozitivan deo realne ose, a ako je $Arg(z) \in [(4k+2)\pi, (4k+4)\pi)$ slike se nalaze u donjoj poluravni uključujući i negativan deo realne ose. Zbog prethodno navedenog dovoljno je posmatrati dve vrednosti argumenta nezavisno promenljive i to slučajeve kada $Arg(z) \in [0, 2\pi)$ i $Arg(z) \in [2\pi, 4\pi)$. Zamislimo da se kompleksna ravan sastoji od dva lista [1] i to na prvom listu argumenti kompleksnih brojeva su na intervalu $[0, 2\pi)$, a na drugom na intervalu $[2\pi, 4\pi)$. Odgovarajuće funkcije koje slikaju ove listove nazivamo granama [2] funkcije $f(z)$. Kako nije moguće uzimanje tačaka sa različitih listova, a da funkcija pritom ostane jednoznačna tada se povlači zasek [3] , u ovom slučaju duž pozitivnog dela realne ose. Zamislimo da je gornja granica prvog lista spojena sa donjom granicom drugog lista, po zaseku, i obrnuto. Tada se prelazeći preko zaseka, prelazi sa jednog na drugi list a samim tim se menja i grana funkcije. Za funkciju $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ kažemo da je dvolisna, to jest da se njena RIEMANNova [4] površ sastoji od dva lista. Vidimo da se obilaskom oko tačaka $z = 0$ i $z = \infty$ argument nezavisno promenljive menja tako da dolazi do promene grane funkcije. One predstavljaju algebarske tačke grananja [5] drugog reda funkcije $f(z)$. Uopštavajući ovaj primer, s obzirom na definisanje pojma korena kompleksnog broja, zaključujemo da funkcija $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$, gde je n prirodan broj, ima n grana, a tačke 0 i ∞ su algebarske tačke grananja $n-$tog reda. Listovi RIEMANNove površi definisani su sa $L_k = \{z = re^{i\varphi} \mid \varphi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)\}$, za $k = 0, 1...n-1$.

Drugi, tipičan primer, multiformnog preslikavanja jeste logaritamska funkcija. Po definiciji imamo da je $\mathrm{Ln}\, re^{i(\varphi+2k\pi)} = \ln r + i(\varphi +$

[1] *list* je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.

[2] *grana* predstavlja restrikciju funkcije na njen list.

[3] *zasek* predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije. Povlačenjem zaseka moguće je definisati tačno jednu granu funkcije na skupu kompleksnih brojeva bez zaseka.

[4] RIEMANN*ova površ* funkcije predstavlja skup svih njenih listova.

[5] tačka, obilaskom oko koje dolazi do promene argumenata drugih tačaka, a samim tim i promene grane funkcije naziva se *tačka grananja.* Red tačke grananja predstavlja broj grana koje se međusobno menjaju obilaskom oko nje i on može biti algebarski (konačan) ili transcedentan (beskonačan).

$2k\pi$). Dakle, skup slika tačke $z \in \mathbf{C}$ je beskonačan. Vidimo, da se u ovom slučaju RIEMANNova površ sastoji od beskonačno (ali prebrojivo) mnogo listova, koji su definisani sa $L_k = \{z = re^{i\varphi} \mid \varphi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)\}$, za $k \in \mathbf{Z}$, a zasek možemo povući duž pozitivnog dela realne ose. Obilazeći oko tačaka $z = 0$ i $z = \infty$ menja se grana funkcije i one predstavljaju transcedentne tačke grananja. Povlačenjem zaseka na različite načine, možemo definisati "razne vrednosti logaritamske funkcije". Ako bi povukli zasek duž poluprave $Re(z) = Im(z)$ u prvom kvadrantu, tada su listovi definisani sa $L_k = \{z = re^{i\varphi} \mid \varphi \in [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi)\}$, za $k \in \mathbf{Z}$.

Ako se u prethodnim primerima zahteva da je $Arg(z) \in [0, 2\pi)$ tada dobijamo *glavne vrednosti* logaritamske i korene funkcije i u tom slučaju Ln označavamo sa ln.

Definisaćemo još neke elementarne funkcije koje su determinisane granom višeznačne logaritamske i korene funkcije.

d) **Inverzne trigonometrijske funkcije.**

Arkus-sinus $\quad \mathrm{Arcsin}\,(z) = -i\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1 - z^2});$

Arkus-kosinus $\quad \mathrm{Arccos}\,(z) = -i\mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1});$

e) **Inverzne hiperboličke funkcije.**

Arkus-sinushiperbolikus $\quad \mathrm{Arcsh}\,(z) = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 + 1});$

Arkus-kosinushiperbolikus $\quad \mathrm{Arcch}\,(z) = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1});$

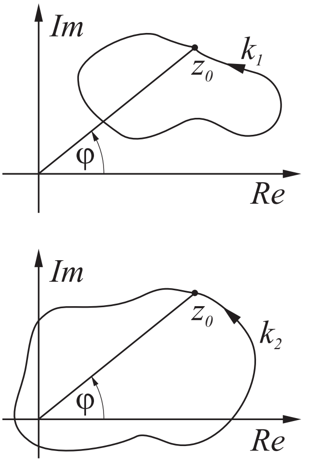
Uzimajući glavne vrednosti logaritamske funkcije dobijamo glavne vrednosti inverznih trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija.

Sledeći, nešto detaljniji tekst, ima za cilj da omogući studentu lakše usvajanje postupka odabira tačno jedne grane multiformne funkcije. U vezi sa tim postoje dva osnovna pitanja.

(1) **Kako povući zasek tako da je moguće izdvojiti jedinstveno definisanu granu funkcije?**

Neka se tačka kreće po pozitivno orijentisanoj zatvorenoj krivoj u kompleksnoj ravni iz koje je izbačen zasek. Zasek treba povući tako da ne dođe do promene vrednosti funkcije u njoj, kada se ona vrati u prvobitni položaj.

Posmatrajmo funkciju $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$. Neka je $z_0 \in \mathbf{C}$ proizvoljna tačka čiji je argument jednak φ. Ako se tačka kreće po konturi k_1 sa Slike 2 nakon povratka u prvobitni položaj njen argument ostaje nepromenjen, a samim tim i vrednost funkcije u njoj. Ako se tačka kreće po konturi k_2 sa Slike 2, nakon povratka u prvobitni položaj njen argument postaje $\varphi + 2\pi$, te se vrednost u njoj menja. Dovoljno je zasek povući tako da sadrži tačku $z = 0$, a standardno se povlači duž pozitivnog dela realne ose. Dakle, u opštem slučaju zasek treba da sadrži sve tačke grananja funkcije, jer se obilazeći oko njih argument menja tako da utiče na vrednost funkcije.



Slika 2.

(2) **Kako definisati određenu granu funkcije?**
Prvo definišemo vrednost u nekoj konkretnoj tački. Funkciju predstavimo u obliku proizvoda i količnika elemenata oblika $z-a$ i kompozicije sa elementarnim funkcijama. Za tačku, u kojoj je definisana vrednost funkcije, odredimo vrednosti argumenata elemenata prethodnog tipa. Argument elementa $z-a$ u nekoj tački z_0 je ugao pod kojim se vidi tačka z_0 iz tačke a. Tačku u kojoj je poznata vrednost funkcije, spojimo krivom γ, koja ne seče zasek (jer je na tom skupu funkcija jednoznačno definisana), sa tačkom u kojoj tražimo vrednost funkcije. Promena argumenta, duž krive γ, u oznaci $\triangle_\gamma \mathrm{Arg}\,(z-a)$, predstavlja razliku argumenata uglova između vektora položaja (u odnosu na tačku a) tačke u kojoj tražimo vrednost i tačke u kojoj je vrednost poznata, i to onaj ugao kome pripada kriva koja te tačke spaja. Konačni argument jednog elementa oblika $z-a$, u tački čiju vrednost tražimo jednak je zbiru argumenta elementa $z-a$ tačke čiju vrednost smo prvenstveno definisali i promene argumenta. Kompozicijom sa elementarnim funkcijama dobijamo argument vrednosti funkcije u tački u kojoj odredjujemo vrednost. Vrednost funkcije je određena izrazom $f(z) = |f(z)|\, e^{i \arg f(z)}$.

Zadaci

7. Za naredne funkcije odrediti tačke grananja, a zatim formirati zaseke tako da je moguće izdvojiti jednu granu funkcije.
(a) $f(z) = \mathrm{Ln}\, z + \sqrt{z}$, (b) $f(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$, (c) $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$,
(d) $f_1(z) = \sqrt[4]{z^2}$ i $f_2(z) = (\sqrt[4]{z})^2$ (e) $f(z) = \mathrm{Ln}\, \frac{z-1}{z}$,
pri čemu $a, b \in \mathbf{R}$.

Rešenje.
(a) $z = 0$ i $z = \infty$ su transcedentne tačke grananja, a zasek se povlači duž pozitivnog dela realne ose.
(b) $z = a$ i $z = b$ su algebarske tačke grananja, drugog reda. Zasek se povlači od tačke $z = a$ do $z = b$, duž realne ose. Tačka $z = \infty$ nije tačka grananja pošto je $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \sqrt{1}$ i imamo različite vrednosti na različitim granama u toj tački.
(c) $z = a$ i $z = b$ su algebarske tačke grananja, drugog reda. Zasek se povlači od tačke $z = a$ do $z = b$, duž realne ose. Nešto kasnije videćemo da tačka $z = \infty$ nije tačka grananja. Ispitivanje njene prirode vezano je za pojam "singulariteta funkcije"(ta tačka predstavlja "pol" prvog reda).
(d) U oba slučaja tačke grananja su $z = 0$ i $z = \infty$, te se zasek povlači duž pozitivnog dela realne ose. Za funkciju f_1 reč je o algebarskim tačkama grananja četvrtog reda, a za f_2 drugog reda. Kako je $(\sqrt[4]{z})^2 = \sqrt{z}$, znači da funkcija f_2 ima dve grane te je njena RIEMANNova površ dvolisna, dok za funkciju f_1 važi da je $\sqrt[4]{z^2} = \pm\sqrt{z}$, te je njena RIEMANNova površ četvorolisna. Zasek se povlači duž pozitivnog dela realne ose, a da bi konstruisali listove RIEMANNove površi za funkciju f_1, konstruišemo po dva lista za svaku od funkcija $\pm\sqrt{z}$.
(e) $z = 0$ i $z = 1$ su transcedentne tačka grananja, dok $z = \infty$ nije tačka grananja, što se pokazuje slično kao u primeru (b). Zask se povlači duž duži $[0, 1]$ na realnoj osi.

8. Odrediti tačke grananja, RIEMANNovu površ, opisati sve grane funkcije $f(z) = \sqrt{z} + \sqrt[3]{z-2}$, i objasniti prelazak sa jedne na drugu granu.

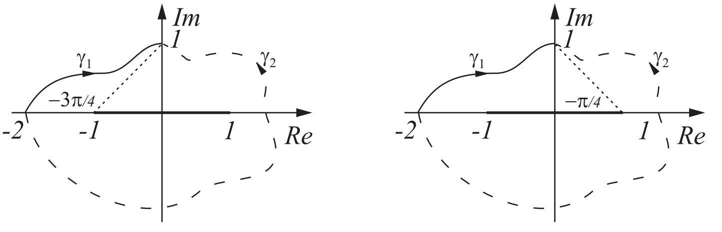
Rešenje. $z = 0$ je algebarska tačka grananja drugog reda, $z = 2$ je algebarska tačka grananja trećeg reda, a $z = \infty$ je algebarska tačka grananja šestog reda. Zaseci se povlače duž polupravih $[0, i\infty)$ i $[2, 2+i\infty)$. RIEMANNova površ sastoji se od šest listova, koji su spojeni po ovim zasecima, a samim tim i funkcija ima šest grana. Posmatrajmo funkcije $f_1(z) = \sqrt{z}$ i $f_2(z) = \sqrt[3]{z-2}$. Definisaćemo po jednu od grana ovih funkcija pomoću $f_1^o(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi_1}{2}}$, $(\varphi_1 = \arg(z) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}))$ i $f_2^o(z) = \sqrt[3]{|z-2|}e^{i\frac{\varphi_2}{3}}$, $(\varphi_2 = \arg(z-2) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}))$. Druga grana funkcije f_1 može se predstaviti u obliku $e^{i\pi}f_1^o(z)$, a preostale dve grane funkcije f_2 imaju oblik $e^{i\frac{2\pi}{3}}f_2^o(z)$ i $e^{i\frac{4\pi}{3}}f_2^o(z)$. Sve grane polazne funkcije f mogu se opisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
f^1(z) &= f_1^o(z) + f_2^o(z), & f^2(z) &= e^{i\pi}f_1^o(z) + f_2^o(z),\\
f^3(z) &= f_1^o(z) + e^{i\frac{2\pi}{3}}f_2^o(z), & f^4(z) &= e^{i\pi}f_1^o(z) + e^{i\frac{2\pi}{3}}f_2^o(z),\\
f^5(z) &= f_1^o(z) + e^{i\frac{4\pi}{3}}f_2^o(z), & f^6(z) &= e^{i\pi}f_1^o(z) + e^{i\frac{4\pi}{3}}f_2^o(z).
\end{aligned}
$$

Obilaskom oko tačke $z = 0$ (prelaskom preko prvog od navedenih zaseka) imamo promenu grana funkcije na sledeći način $f^1 \leftrightarrow f^2$, $f^3 \leftrightarrow f^4$, $f^5 \leftrightarrow f^6$ (odnosno analogan prelazak sa odgovarajućih RIEMANNovih površi). Obilaskom oko tačke $z = 2$ (prelaskom preko drugog od navedenih zaseka) imamo promenu grana funkcije na sledeći način $f^1 \leftrightarrow f^3 \leftrightarrow f^5$, $f^2 \leftrightarrow f^4 \leftrightarrow f^6$ (odnosno analogan prelazak sa odgovarajućih RIEMANNovih površi). U tački $z = 0$ spajaju se vrednosti po dve grane tačnije $f^1(0) = f^2(0)$, $f^3(0) = f^4(0)$, $f^5(0) = f^6(0)$, te je ta tačka algebarska tačka grananja drugog reda, dok se u tački $z = 2$ spajaju po tri grane $f^1(2) = f^3(2) = f^5(2)$, $f^2(2) = f^4(2) = f^6(2)$, te je ona algebarska tačka grananja trećeg reda.

9. Odrediti sve vrednosti funkcije $f(z) = \sqrt[5]{\frac{1+z}{1-z}}$ u tački $z = -2$. U zavisnosti od odabrane grane odrediti vrednost $f(i)$.

Rešenje. U tački $z = -2$ imamo da je $\arg_{(z=-2)}(z+1) = \pi + 2k\pi$, i $\arg_{(z=-2)}(1-z) = 2l\pi$ gde $k, l \in \mathbf{Z}$ odakle sledi da je $\arg_{(z=-2)} \sqrt[5]{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1}{5}(\pi + 2k\pi - 2l\pi)$. Kako je $|f(-2)| = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ tada je $f(-2) = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}e^{i\frac{\pi+2(k-l)\pi}{5}}$. Zbog periodičnosti trigonometrijskih funkcija različite vrednosti polazne funkcije dobijamo za $k - l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i u tački -2 one iznose $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}e^{i\frac{\pi}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}e^{i\pi}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}e^{i\frac{7\pi}{5}}$ i $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}e^{i\frac{9\pi}{5}}$. Tačke $z = -1$ i $z = 1$ su algebarske tačke grananja petog reda, RIEMANNova površ je petolisna, a zasek povlačimo između navedenih tačaka grananja, duž realne ose. Razmatraćemo dva slučaja, u zavisnosti od krive γ koja spaja tačke -2 i i. Neka je tačka -2 spojena krivama γ_1 i γ_2 koje su orjentisane kao na Slici 3.

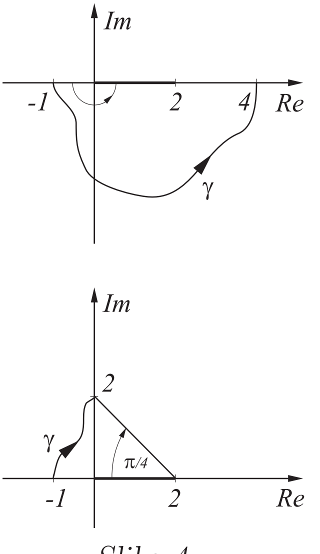


Slika 3.

Na prvom crtežu slike 3 prikazana je promena argumenta elementa $z+1$, a na drugoj promena argumenta elementa $1-z$. Imamo da je $\Delta \arg_{\gamma_1}(z+1) = -\frac{3\pi}{4}$, $\Delta \arg_{\gamma_1}(1-z) = -\frac{\pi}{4}$, $\Delta \arg_{\gamma_2}(z+1) = \frac{5\pi}{4}$ i $\Delta \arg_{\gamma_2}(1-z) = \frac{7\pi}{4}$, odakle sledi da je $f(i) = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2(k-l)\pi}{5})}$ bez obzira po kojoj od krivih je posmatrana promena argumenta, pošto one ne seku zasek funkcije.

10. Data je funkcija $f(z) = \sqrt{z(2-z)}$. Pokazati da je moguće odabrati granu funkcije definisanu sa $f(-1) = \sqrt{3}i$, a zatim odrediti $f(4)$ i $f(2i)$.

Rešenje. Tačke $z=0$ i $z=2$ su algebarske tačke grananja drugog reda, RIEMANNova površ je dvolisna, a zasek povlačimo između navedenih tačaka grananja, duž realne ose. Kako je $\arg_{(z=-1)} z = \pi$ i $\arg_{(z=-1)}(2-z) = 0$, sledi da je $\arg f(-1) = \frac{\pi}{2}$, odakle dobijamo da je $f(-1) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}i$. Neka je tačka $z=-1$ spojena sa $z=4$ krivom γ kao na prvom grafiku sa Slike 4. Imamo da je u odnosu na tačku $z=-1$, promena argumenta duž krive γ, u tački $z=4$ jednaka $\triangle \arg_\gamma z = \pi$ i $\triangle \arg_\gamma(2-z) = \pi$, odakle dobijamo da je $\arg_{(z=4)} z = 2\pi$ i $\arg_{(z=4)}(2-z) = \pi$.



Slika 4.

Konačno, dobijamo da je $\arg f(4) = \frac{3\pi}{2}$, te je $f(4) = -2\sqrt{2}i$. Odredimo vrednost funkcije u tački $2i$. Neka je tačka $z = -1$ spojena sa $z = 2i$ krivom γ kao na drugom grafiku sa Slike 4. Tada imamo da je u odnosu na tačku $z = -1$ promena argumenta duž krive γ u tački $z = 2i$ jednaka $\triangle \arg_\gamma z = -\frac{\pi}{2}$ i $\triangle \arg_\gamma (2-z) = -\frac{\pi}{4}$, odakle dobijamo da je vrednost $\arg_{(z=2i)} z = \frac{\pi}{2}$ i $\arg_{(z=2i)}(2-z) = -\frac{\pi}{4}$. Konačno dobijamo da je $\arg f(2i) = \frac{\pi}{8}$, te je $f(2i) = 2\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Zadaci za vežbu

4. Odrediti tačke grananja, kao i zaseke funkcija
a) $f(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$,
b) $f(z) = \sqrt[3]{\frac{z-a_1}{(z-a_2)^2}} + \sqrt{z-a_3}$,
a zatim opisati RIEMANNove površi funkcije.

Rezultat. a) Tačke $z = a_i$, $(i = 1, 2, 3)$ i $z = \infty$ su algebarske tačke grananja drugog reda. Zaseci se povlače od konačnih tačaka do beskonačnosti paralelno sa imaginarnom osom. RIEMANNova površ je dvolisna.
b) Tačke $z = a_1$ i $z = a_2$ su algebarske tačke grananja trećeg reda, a $z = a_3$ algebarska tačka grananja drugog reda. $z = \infty$ je algebarska tačka grananja šestog reda. Zaseci se povlače od konačnih tačaka do beskonačnosti paralelno sa imaginarnom osom. RIEMANNova površ ima šest listova.

5. Za sledeće funkcije odrediti tačke grananja, formirati zaseke i opisati RIEMANNove površi. Ako je funkcija defisana u tački z_0 odrediti $f(z_1)$.
a) $f(z) = \mathrm{Ln}\,(z-1)$, $f(z_0 = 0) = i\pi$, $z_1 = -i$.
b) $f(z) = \sqrt{z^3 - z^4}$, $f(z_0 = -2) = \sqrt{24}i$, $z_1 = 2$.

Rezultat. a) Tačke $z = 1$ i $z = \infty$ su transcendentne tačke grananja a zasek se povlači od tačke 1 do ∞ duž pozitivnog dela realne ose. $f(z_1) = \ln\sqrt{2} + \frac{5\pi}{4}i$.
b) Tačke $z = 0$ i $z = 1$ su algebarske tačke grananja drugog reda i zasek se povlači između tih tačaka duž realne ose. $f(2) = 2\sqrt{2}i$. Nije teško uočiti da je za svako $x \in \mathbf{R}$, $x > 1$ vrednost funkcije određena sa $f(x) = i\sqrt{x^4 - x^3}$.

$$\cancel{e^{(1+|f(z)|)^2}\left(4(u^2u_x^2+v^2v_x^2)+8uvu_xv_x+2(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}^2+vv_{xx}^2)\right),}$$

$$\cancel{e^{(1+|f(z)|^2)}\left(4(u^2u_y^2+v^2v_y^2)+8uvu_yv_y+2(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}^2+vv_{yy}^2)\right).}$$

~~Kako je funkcija $f(z)$ analitička tada je $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$, te važi da je $|f'(z)|^2=u_x^2+v_x^2=v_y^2+u_y^2$. Kako su funkcije u i v harmonijske tada je $u_{xx}+u_{yy}=0$ i $v_{xx}+v_{yy}=0$. Zbog CAUCHY-RIEMANNovih uslova važi da je $u_x^2=v_y^2$, $u_y^2=v_x^2$ i $uvu_xv_x+uvu_yv_y=0$. Zbog ovih osobina, sabiranjem prethodnih jednakosti dobijamo tvrđenje iz zadatka. Analogno se dokazuju tvrđenja (b) i (c).~~

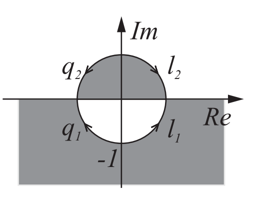
Preslikavanja skupova tačaka kompleksnim funkcijama

24. Dati geometrijsku interpretaciju preslikavanja

(a) $f(z)=z+a$, (b) $f(z)=az$ i (c) $f(z)=z^n$ $(n\in\mathbf{N})$, za $a\in\mathbf{C}$.

Rešenje. (a) Preslikavanje predstavlja translaciju za vektor $\vec{a}$.
(b) Ako tačku a predstavimo u obliku $a=\rho e^{i\varphi_0}$, a tačku z pomoću $z=re^{i\varphi}$ imamo da je $f(z)=\rho re^{i(\varphi_0+\varphi)}$, odakle sledi da je dato preslikavanje kompozicija rotacije za ugao φ_0 i homotetije sa koeficijentom ρ.
(c) Slično kao u prethodnom imamo kompoziciju "uvećanja" modula broja i rotacije za ugao $(n-1)\varphi$.

25. *Recipročnom funkcijom* $f(z)=\frac{1}{z}$ preslikati kružnicu $|z|=1$ kompleksne ravni. Na šta se preslikava unutrašnjost, odnosno spoljašnjost jedinične kružnice?



Rešenje. Ako je z tačka jediničnog kruga tada je $|z|=1$, odakle sledi da je $|f(z)|=1$, što znači da se tačke jediničnog kruga slikaju u tačke istog kruga, ali izuzev tačaka $z=1$ i $z=-1$, menjaju mesto na krugu. Kako iz $|z|<1$ sledi da je $|f(z)|>1$ i obrnuto, zaključujemo da se unutrašnjost jediničnog kruga slika u njegovu spoljašnost i obrnuto. Iz $f(\pm i)=\mp i$, zbog činjenice da je preslikavanje konformno te čuva orjentaciju krivih, zaključujemo da se gornja poluravan slika u donju i obrnuto. Osenčene oblasti sa slike slikaju se međusobno jedna u drugu, a takođe i neosenčene. Krive l_1 i l_2, a takođe i krive q_1 i q_2 slikaju se međusobno jedna u drugu, u odgovarajućem smeru.

26. Za $z = x + yi$, *krug u širem smislu* u kompleksnoj ravni definiše se izrazom $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad (b^2 + c^2 \geq 4ad, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R})$ i obuhvata jednačinu prave i jednačinu kruga u smislu klasične definicije u $\mathbf{R}^2$. U slučaju kada je $a = 0$ jednačina kruga u širem smislu predstavlja pravu. Dokazati da se recipročnom funkcijom krug u širem smislu, slika u krug u širem smislu.

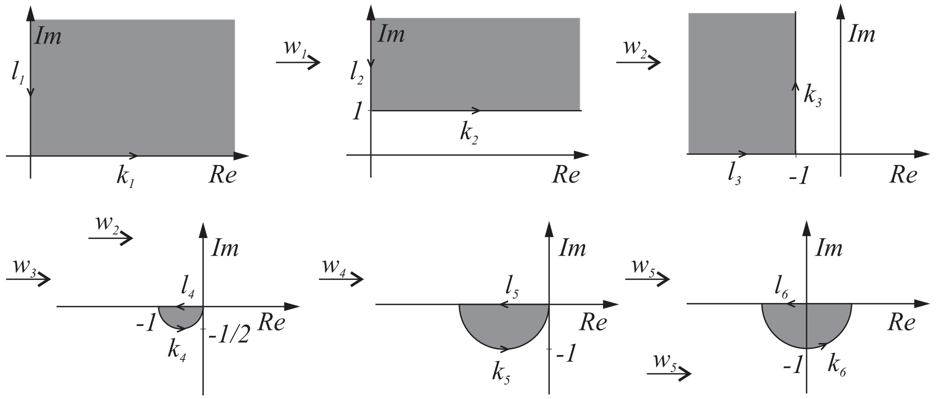
Rešenje. Neka je $w = \frac{1}{z}$, gde je sa $w = u + iv$ označena slika tačke $z = x + yi$. Iz $u + iv = \frac{1}{x+yi}$ razdvajanjem realnog i imaginarnog dela dobijamo da je $x = \frac{u}{u^2+v^2}$ i $y = -\frac{v}{u^2+v^2}$. Zamenom dobijenih veza u jednačinu kruga u širem smislu dobijamo jednačinu slike polaznog kruga $d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$ koja takođe predstavlja krug u širem smislu. Izvešćemo neke zaključke:
(A) Ako je $a \neq 0$ i $d \neq 0$ tada je reč o krugu koji ne prolazi kroz koordinatni početak i slika se u krug koji ne prolazi kroz koordinatni početak.
(B)Ako je $a \neq 0$ i $d = 0$ tada je reč o krugu koji prolazi kroz koordinatni početak i slika se u pravu koja ne prolazi kroz koordinatni početak.
(C)Ako je $a = 0$ i $d \neq 0$ tada je reč o pravoj koja ne prolazi kroz koordinatni početak i slika se u krug koji prolazi kroz koordinatni početak.
(D)Ako je $a = 0$ i $d = 0$ tada je reč o pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak i slika se u pravu koja prolazi kroz koordinatni početak.
Geometrijski posmatrano, kako se tačka 0 slika u ∞ i obrnuto, zaključci (B) i (C) su sasvim logični, pošto ne postoji krug koji sadrži ∞.

27. Funkcijom $w(z) = \frac{z-i}{z+i}$ preslikati oblast

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C} |\ 0 < \arg(z) < \pi/2\}.$$

Ispitati detaljno preslikavanje ruba oblasti Ω..

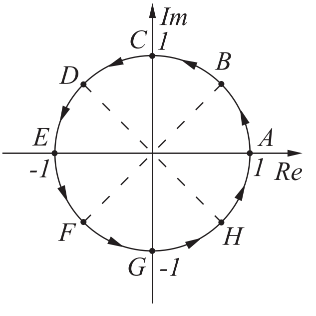
Rešenje. Kako se funkcija može predstaviti kao $w(z) = 1 + \frac{2}{i(z+i)}$, možemo je razložiti na $w_1(z) = z + i$, $w_2(z) = iz$, $w_3(z) = \frac{1}{z}$, $w_4(z) = 2z$ i $w_5(z) = 1 + z$, tako da je $w(z) = w_5(w_4(w_3(w_2(w_1(z)))))$. Preslikavanjem polazne oblasti, redom, kao na slici 7, pri čemu je sa l_{j+1} označena slika krive l_j pri preslikavanju w_j, a sa k_{j+1} označena slika krive k_j za $j = 1, 2, 3, 4$ i 5, svakim od preslikavanja koja dekomponuju polaznu funkciju dobijamo sliku polazne oblasti. Strelice na graničnim krivama označavaju orjentaciju krivih, koje predstavljaju rub oblasti Ω. Orjentacija ostaje ista pri svakom od preslikavanja, pošto su konformna. Pri preslikavanjima koristimo geometrijske interpretacije opisane u zadacima 24, 25 i 26. Osenčeni deo predstavlja sliku prethodne oblasti, svakim od preslikavanja, redom.



Slika 7.

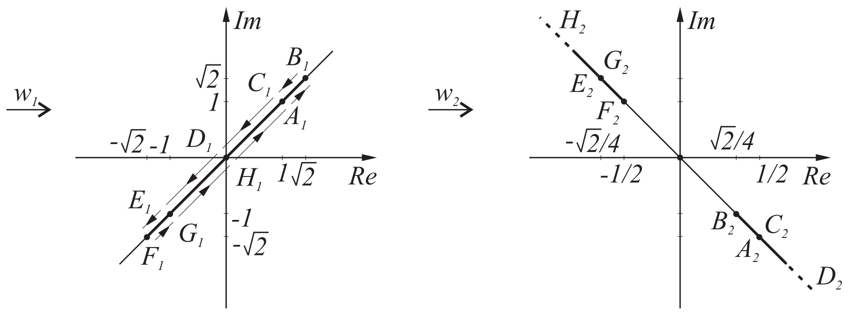
28. Funkcijom $f(z) = \frac{z}{z^2+i}$ preslikati krug $|z| = 1$.

Rešenje. Polazna funkcija može se predstaviti u obliku $w(z) = \frac{1}{z+\frac{i}{z}}$, te je možemo predstaviti kao kompoziciju preslikavanja $w_2(z) = \frac{1}{z}$ i $w_1(z) = z + \frac{i}{z}$, pomoću $w(z) = w_2(w_1(z))$. Funkcijom w_1, krug koji je podeljen kao na slici 8, slika se u duž sa prvog crteža slike 9. Pojasnićemo ovo preslikavanje. Ako tačka z leži na jediničnom krugu, tada je $z = e^{i\varphi}$, odakle zamenom u w_1 dobijamo da je $w_1(z) = (\cos\varphi + \sin\varphi) + i(\cos\varphi + \sin\varphi)$.



Slika 8.

Znači, slika tačke z nalazi na pravoj $u = v$, za $w_1 = u + iv$. Tačke A,B,...,H se slikaju u tačke $A_1, B_1, ..., H_1$, redom. Kako duž dobijena preslikavanjem w_1 pripada pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak, tada se njena slika recipročnom funkcijom nalazi na pravoj koja takođe prolazi kroz koordinatni početak. Nalaženjem slika tačaka $A_1, B_1, ..., H_1$, pomoću w_2 dobijamo konačnu sliku polaznog kruga, koja je predstavljena na drugom crtežu slike 9.



Slika 9.

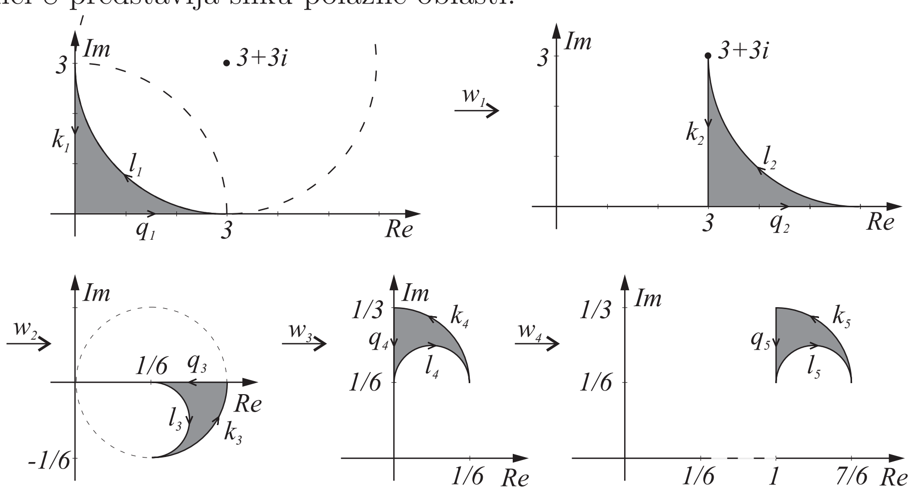
29. Funkcijom $w(z) = \frac{z+3+i}{3+z}$ preslikati oblast

$$\Omega = \{z \mid 0 < \arg(z) < \tfrac{\pi}{2},\ |z| < 3,\ |z-(3+3i)| > 3\}.$$

Rešenje. Kako se funkcija može predstaviti kao $w(z) = 1 + \frac{i}{3+z}$ možemo je razložiti na funkcije

$$w_1(z) = 3 + z,\ w_2(z) = \tfrac{1}{z},\ w_3(z) = iz \text{ i } w_4(z) = 1 + z.$$

Postupkom kao u prethodnom zadatku dobijamo da poslednji crtež na slici 8 predstavlja sliku polazne oblasti.



Slika 10.

30. Funkcijom $w(z) = \sin z$ preslikati oblast

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\,(z) < \frac{\pi}{2},\ Im(z) > 0 \right\}.$$

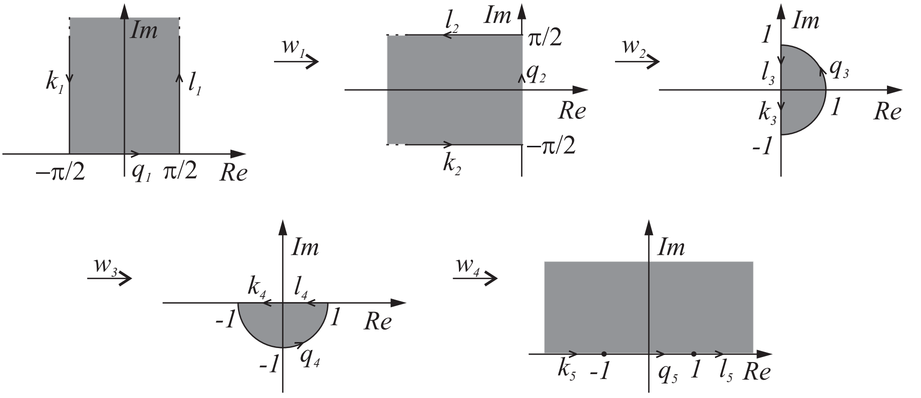
Da li je ovo preslikavanje konformno?

Rešenje. Kako je

$$\sin z = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{i} - \frac{e^{-iz}}{i}\right) = \frac{1}{2}\left(-ie^{iz} + \frac{1}{-ie^{iz}}\right),$$

polaznu funkciju možemo predstaviti kao kompoziciju funkcija

$$w_1(z) = iz,\ w_2(z) = e^z,\ w_3(z) = -iz \ \text{ i } \ w_4(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$



Slika 11.

Funkcije w_1 i w_3 predstavljaju rotacije za ugao od $\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$, redom. Posmatrajmo preslikavanje w_2 kojim treba preslikati oblast sa drugog crteža slike 11. Kako je tu oblast moguće opisata sa $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) < 0,\ -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\,(z) < \frac{\pi}{2}\}$, imamo da je $e^z = \frac{1}{e^{|x|}} \cdot e^{iy}$, te je $|e^z| < 1$ pa se cela oblast slika u unutrašnjost jediničnog kruga. Kako je $w_2(\infty) = 0$, a $w_2(0) = 1$, slika je unutrašnjost jediničnog kruga u desnoj poluravni. Preslikavanje w_4, koje se naziva *Funkcija Žukovskog* predstavlja zbir linearne i recipročne funkcije. Ovim preslikavanjem, tačka $z = e^{i\varphi}$ jediničnog kruga, slika se u tačku $\cos\varphi$, realne prave, koja predstavlja granicu gornje i donje poluravni. Kako je $w_4(-\frac{i}{2}) = \frac{3}{4}i$, a preslikavanje neprekidno tada se sve slike donjeg polukruga nalaze u gornjoj poluravni.

Preslikavanje definisano funkcijom w_4 konformno je u svim tačkama kompleksne ravni, izuzev u tačkama $z = \pm 1$, te se uglovi između krivih, koje se seku u ovim tačkama, menjaju nakon primene preslikavanja.

31. Funkcijom $f(z) = \frac{\sin z}{e^{iz}}$ preslikati oblast

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid \tfrac{\pi}{6} < \mathrm{Re}\,(z) < \tfrac{\pi}{4}\}.$$

Rešenje. Kako je $f(z) = \frac{\sin z}{e^{iz}} = -\frac{i}{2} + \frac{i}{2}\frac{1}{e^{2iz}}$, funkciju možemo predstaviti kao kompoziciju funkcija $f_1(z) = 2iz$, $f_2(z) = e^z$, $f_3(z) = \frac{1}{z}$, $f_4(z) = \frac{i}{2}z$, $f_5(z) = -\frac{i}{2} + z$. Slika koja se dobija redom svakim od preslikavanja je

$$\begin{aligned}
D_1 &= f_1(D) = \{z \in \mathbf{C} \mid \tfrac{\pi}{3} < \mathrm{Im}(z) < \tfrac{\pi}{2}\},\\
D_2 &= f_2(D_1) = \{z \in \mathbf{C} \mid \arg(z) \in (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2})\},\\
D_3 &= f_3(D_2) = \{z \in \mathbf{C} \mid \arg(z) \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{3})\},\\
D_4 &= f_4(D_3) = \{z \in \mathbf{C} \mid \arg(z) \in (0, \tfrac{\pi}{6})\},\\
D_5 &= f_5(D_4) = \{z \in \mathbf{C} \mid \arg(z + \tfrac{i}{2}) \in (0, \tfrac{\pi}{6})\} = f(D).
\end{aligned}$$

Bilinearna transformacija

32. Funkcijom $w(z) = \frac{z}{1-z}$ preslikati

$$(a)\ \ D = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}\ \text{ i }\ (b)\ \text{ krug }\ |z| = 1.$$

Rešenje. Zadatak je moguće rešiti dekompozicijom funkcije, kao u prethodnim zadacima. U ovom zadatku pokazaćemo nalaženje slike bilinearnom transformacijom, pomoću inverzne transformacije. Nije teško uočiti da je inverzno preslikavanje zadato sa $z = \frac{w}{1+w}$. Predstavimo tačku z pomoću $z = x + yi$, a njenu sliku w sa $w = u + iv$.

(a) Zamenom tačaka z i w u inverznu transformaciju, nakon izjednačavanja imaginarnih delova, dobijamo da je $y = \frac{v}{(u+1)^2+v^2}$. Kako je uslov $y \geq 0$ ekvivalentan uslovu $v \geq 0$ tada se gornja poluravan D slika u gornju poluravan.

(b) Zamenom inverzne transformacije u jednačinu polaznog kruga dobijamo da se on slika u pravu $u = -\frac{1}{2}$.

33. Funkcijom $w(z) = \frac{z-1}{z+1}$ preslikati krug $x^2 + y^2 - 2y = 0$, gde je $z = x + yi$.

Rešenje. Koristeći veze da je $z\bar{z} = x^2 + y^2$, $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ i $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ imamo da jednačina kruga glasi $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$. Kako je inverzna transformacija određena pomoću $z = \frac{1+w}{1-w}$ zamenom u prethodnu jednačinu polaznog kruga dobijamo da je slika polaznog kruga, krug čija je jednačina $u^2 + v^2 + 2u - 4v + 1 = 0$, gde je $w = u + iv$.

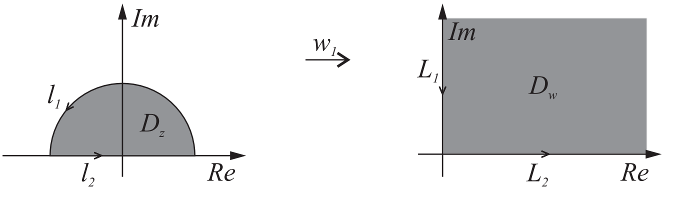
34. Odrediti bilinearnu transformaciju koja oblast

$$D_z = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1, \ \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

preslikavaju na oblast

$$D_w = \{w \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, w > 0 \ \ \mathrm{Im}\, w > 0\}.$$

Rešenje. Oblast D_z ograničena je dvema krivama, tačnije gornjim polukrugom jediničnog kruga sa centrom u koordinatnom početku, koju ćemo označiti sa l_1 i orjentisati od tačke 1 ka -1, i delom realne prave između tačaka -1 i 1 koju ćemo označiti sa l_2. Oblast D_w ograničena je dvema polupravama, tačnije nenegativnim delovima realne i imaginarne ose u kompleksnoj ravni. Deo imaginarne ose od beskonačnosti do tačke 0 označimo sa L_1, a deo realne ose od nule do beskonačnosti označimo sa L_2. Navedeni elementi prikazani su na narednoj slici.



Kako bilinearna transformacija čuva uglove između krivih, tada postoje dve mogućnosti.

Prva mogućnost. Ako je $f(-1) = 0$ i $f(1) = \infty$, tada mora važiti da je $b = a$ i $d = -c$, te tražena transformacija ima oblik $f(z) = \frac{a}{c}\frac{z+1}{z-1}$. Zbog konformnosti preslikavanja sledi da se kriva l_1 slika u krivu L_1, a kriva l_2 u krivu L_2. Kako se tačka $z = 0$ slika u pozitivan broj sa realne ose imamo da $\frac{a}{c}$ mora biti negativan, pošto je $f(0) = -\frac{a}{c}$. Dakle tražena preslikavanja su oblika $f(z) = \alpha\frac{z+1}{z-1}$, gde je α proizvoljan negativan realan broj.

Druga mogućnost. Ako je $f(1) = 0$ i $f(-1) = \infty$, tada mora važiti da je $b = -a$ i $d = c$, te tražena transformacija ima oblik $f(z) = \frac{a}{c}\frac{z-1}{z+1}$.

Kako se kriva l_1 slika u krivu L_2, a kriva l_2 u krivu L_1 tada se tačka $z = 0$ slika u tačku sa pozitivnog dela imaginarne ose te $\frac{a}{c}$ mora biti negativan umnožak imaginarne jedinice i, pošto je $f(0) = -\frac{a}{c}$. Dakle tražena preslikavanja su oblika $f(z) = \alpha i \frac{z-1}{z+1}$, gde je α proizvoljan negativan realan broj.

35. Odrediti sve bilinearne transformacije koje krug

$$k_z = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 2\}$$

preslikavaju na krug

$$k_w = \{w \in \mathbf{C} \mid |w+1| = 1\},$$

a tačke -2 i 0 u tačke 0 i i respektivno.

Rešenje. Uočimo da je jednačinu kruga k_w moguće predstaviti u obliku $|w+1|^2 = 1$, što je ekvivalentno sa $(w+1)\overline{(w+1)} = 1$, odnosno sa $w\overline{w} + w + \overline{w} = 0$. Neka je tražena transformacija $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, gde su $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ nepoznate konstante. Zamenom u jednačinu kruga dobijamo jednakost

$$(a\overline{a} + a\overline{c} + \overline{a}c)z\overline{z} + (\overline{a}b + b\overline{c} + \overline{a}d)\overline{z} + (a\overline{b} + a\overline{d} + \overline{b}c)z + (b\overline{b} + b\overline{d} + \overline{b}d) = 0,$$

koja mora predstavljati polazni krug $z\overline{z} = 4$. Tada moraju važiti jednakosti:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \overline{a}b + b\overline{c} + \overline{a}d = 0 \text{ i} \\ &(2) \quad -4(a\overline{a} + a\overline{c} + \overline{a}c) = (b\overline{b} + b\overline{d} + \overline{b}d). \end{aligned}$$

Kako mora važiti da je $w(-2) = 0$, tada je $b = 2a$, a zbog $w(0) = i$ sledi da je $d = -2ai$. Zamenom poslednjih veza u (1) i (2) dobijamo da je $c = -(1+i)a$, te je traženo preslikavanje $w(z) = -\frac{z+2}{(1+i)z+2i}$.

36. Odrediti skupove koji se funkcijom $f(z) = e^z$ slikaju u gornju poluravan kompleksne ravni $\mathbf{C}$.

Rešenje. Kako je $e^z = e^x e^{iy}$ skupovi oblika

$$S_k = \Big\{ z = x + iy \mid x \in \mathbf{R},\ y \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \Big\}$$

se slikaju u gornju poluravan, uključujući i realnu osu, pošto su argumenti slika na intervalu $[2k\pi, (2k+1)\pi]$. Zadatak se može uopštiti. Funkcija $f(z) = e^{\frac{m}{n}z}$, gde su m i n uzajamno prosti brojevi skupove

$$S_{n,m} = \left\{ z = x + iy \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \left[\frac{n}{m} 2k\pi, \frac{n}{m}(2k+1)\pi \right] \right\}$$

slika u gornju poluravan.

37. Odrediti opšti oblik bilinearne transformacije koja gornju poluravan, bez realne ose, slika na unutrašnjost jediničnog diska. Zatim odrediti bar jednu analitičku funkciju koja skup

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \mathrm{Im} z < 6\pi\},$$

slika na unutrašnjost jediničnog diska.

Rešenje. Neka je $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, gde su $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ nepoznate konstante. Kako je granica gornje poluravni realna osa tada se ona mora slikati u jediničnu kružnicu, koja je granica jediničnog diska. Pretpostavimo da je reč o jediničnoj kružnici sa centrom u koordinatnom početku. Ako bi bilo $a = 0$ tada ne postoji tačka koja se slika u 0. Ako bi bilo $c = 0$, tada je tražena funkcija linearna, te bi slika realne ose bila prava. Zbog toga traženu funkciju možemo predstaviti u obliku $w(z) = \frac{a}{c}\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$. Kako tačka 0 leži unutar jedinične kružnice, tada postoji tačka z_0 koja leži u gornjoj poluravni koja se slika u 0, te je $\frac{b}{a} = -z_0$. Kako bilinearna transformacija očuvava simetriju, tada se tačka $\overline{z}_0$ koja je simetrična tački z_0 u odnosu na realnu osu slika u beskonačno, koje je simetrično tački 0 u odnosu na krug. Zbog toga je $\frac{d}{c} = -\overline{z}_0$. Kako je za svaku tačku x sa realne ose njena slika na jediničnom krugu tada mora važiti da je $|w(x)| = 1$. Kako je $|w(x)| = |\frac{a}{c}||\frac{x-z_0}{x-\overline{z}_0}| = 1$, tada je $|\frac{a}{c}| = 1$, te je $\frac{a}{c} = e^{i\alpha}$, za neki broj α. Preslikavanje, koje gornju poluravan slika u unutrašnjost jediničnog diska je oblika

$$w(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0},$$

gde je z_0 proizvoljna tačka gornje poluravni, a $\alpha \in \mathbf{R}$ proizvoljan broj. Kako funkcija $w_1(z) = \frac{1}{6}z$ skup D slika na skup $D_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$, a funkcija $w_2(z) = e^z$ skup D_1 slika na gornju poluravan, obzirom na prvi deo zadatka, sledi da je

$$w(z) = e^{i\alpha}\frac{e^{\frac{1}{6}z} - z_0}{e^{\frac{1}{6}z} - \overline{z}_0}$$

preslikavanje koje skup D slika na jedinični disk.

Zadaci za vežbu

6. Odrediti konstante $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$, tako da funkcija
$$f(x+iy) = x^3 + axy^2 + by^3 + i(cx^3 + dx^2y + ey^3)$$
bude regularna, a zatim odrediti funkciju u potpunom obliku.

Rezultat. $a = -3,\ b = c = 0,\ d = 3$ i $e = -1$. $f(z) = z^3$.

7. Odrediti analitičku funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi})$, čiji je realni deo funkcija $u(r,\varphi) = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{r}$, u potpunom obliku.

Rezultat. $f(z) = \frac{1}{z}(1+i) + ic$.

8. Odrediti analitičku funkciju $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, čiji je realni deo oblika $u(x,y) = g(\frac{y}{x})$, gde je g dva puta diferencijabilna funkcija koju treba odrediti.

Rezultat. $g(t) = c_1 \mathrm{arctg} t + c_2 \quad (t = \frac{y}{x})$, a $f(z) = ic_1 \ln z + c_2 + ic_3,\ (c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R})$.

9. Ispitati da li postoji harmonijska funkcija oblika $u(x,y) = \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$, gde je φ dva puta diferencijabilna funkcija, i ukoliko postoji odrediti je.

Rezultat. $u(x,y) = \frac{c_1 x}{x^2+y^2} + c_2$.

10. Funkcijom $f(z) = \frac{z^2-4iz-2}{z^2-4iz-3}$ preslikati oblast
$$D = \left\{ z \mid \ |z-2i| < 2,\ -\frac{\pi}{6} < \arg(z-2i) < 0 \right\}.$$

Rezultat. $f(D) = \{z \mid \ |z-1| < 4,\ \mathrm{Im}z < 0,\ \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z > 1\}$.

11. Funkcijom $f(z) = \frac{-iz+i-1}{z-i}$ preslikati oblast
$$D = \left\{ z \mid \ |z-2i| < 1,\ \left|z - \frac{5}{2}i\right| > \frac{1}{2},\ \mathrm{Im}z > 2 \right\}.$$

Rezultat. $f(D) = \left\{ z \mid \ |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2},\ |z - \frac{3}{4}| > \frac{1}{4},\ \mathrm{Re}z > \frac{1}{2} \right\}$.

12. Funkcijom $f(z) = \frac{zi-1+\frac{\pi}{4}}{-zi+1}$ preslikati oblast

$$D = \left\{ z : \left| z - \frac{1}{4} + i \right| > \frac{1}{4},\ \left| z - \frac{1}{2} + i \right| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Rezultat. $f(D) = \left\{ z : \frac{\pi}{4} < \mathrm{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\}$.

13. Odrediti bar jednu analitičku funkciju koja oblast

$$D = \left\{ z : \tfrac{\pi}{6} < \arg z < \tfrac{\pi}{3} \right\}$$

preslikava na unutrašnjost jediničnog kruga $|w| < 1$.

Rezultat. $w(z) = \frac{i+z^6}{i-z^6}$.

14. Odrediti bar jednu funkciju $w = w(z)$, kojom se oblast

$$D_z = \left\{ z : |z| < 1,\ \left| z - \tfrac{1}{2} \right| > \tfrac{1}{2} \right\}$$

konformno preslikava na gornju poluravan.

Rezultat. $w = e^{-\pi i \frac{z+1}{z-1}}$.

15. Odrediti uslove pod kojima bilinearna transformacija $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gde $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, slika unutrašnjost jediničnog diska, sa centrom u koordinatnom početku, na gornju poluravan bez realne ose.

Rezultat. $a\overline{d} - b\overline{c} = 0,\ \ \mathrm{Im}\left(\frac{b}{d}\right) > 0$.

16. Odrediti opšti oblik bilinearne transformacije koja jedinični disk slika na samog sebe.

Rezultat. $w = e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, gde je z_0 proizvoljna tačka takva da je $|z_0| < 1$, a $\alpha \in \mathbf{R}$ proizvoljan broj.

17. Odrediti regularnu funkciju $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, čiji je realan deo $u(x, y) = 2 - x$ i $f(2) = 0$. Funkcijom $\frac{f(z)}{z}$ preslikati oblast $D = \left\{ z : |z| < 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$.

Rezultat. $f(z) = 2 - z$, a $f(D) = \{z : |z + 1| > 2, \mathrm{Im}\, z < 0, \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z > -1\}$.