~~**55.** Izračunati integral~~

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+c)\,dx \quad (\operatorname{Im}(c) \neq 0).$$

~~**Rešenje.** Uvodeći da je $z = e^{i(x+c)}$ imamo da je~~

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+c)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x+c)\,dx = \frac{1}{2}\int_{|z|=e^{-\operatorname{Im} c}} \frac{1-z^2}{1+z^2}\,\frac{dz}{z}.$$

~~Tačke $z = 0$ i $z = \pm i$ su polovi prvog reda u kojima ostaci iznose 1 i -1, redom.~~

~~Tačke $z = \pm i$ obuhvaćene su konturom po kojoj vršimo integraciju, ukoliko je $\operatorname{Im} c < 0$. Dobijamo da je polazni integral~~

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+c)\,dx = \pi i \operatorname{sgn}(Im(c)).$$

Integracija po četvrtini kruga

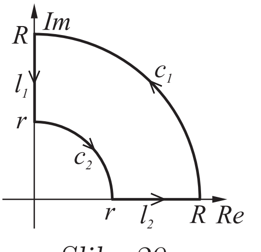
56. Kompleksnom integracijom dokazati da za svako $s \in (0,1)$ važi

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-ix}\,dx = \Gamma(s)e^{\frac{-i\pi s}{2}},$$

a zatim pomoću tog rezultata izračunati vrednost integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n}\,dx \quad (n \geq 2).$$

Dokaz. Izvršimo, po konturi sa slike 20, integraciju kompleksne funkcije $f(z) = z^{s-1}e^{iz}$. Kako funkcija nema singulariteta unutar oblasti koju ograničava kontura l i koja se sastoji od krivih l_2, c_1, l_1 i c_2, tada na osnovu prve CAUCHY-GOURSATove teoreme važi da je $\int_l f(z)dz = 0$. Kako je $\lim\limits_{z\to+\infty} z^{s-1} = 0$ i $\lim\limits_{z\to 0} z^s e^{iz} = 0$, tada zbog prve, odnosno treće JORDANove leme važi da je:



Slika 20.

$$(\Delta 1) \qquad \lim_{R\to+\infty}\int_{c_1} f(z)\,dz = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{r\to 0}\int_{c_2} f(z)\,dz = 0.$$

Puštajući da $R \to +\infty$ i $r \to 0$ iz jednakosti
$\int_{l_2} f(z)\,dz = \int\limits_r^R z^{s-1}e^{iz}\,dz$, $\int_{l_1} f(z)\,dz = \int\limits_{Ri}^{ri} z^{s-1}e^{iz}\,dz = -i^s \int\limits_r^R t^{s-1}e^{-t}\,dt$,
dobijamo da

$$(\Delta 2) \qquad \int_{l_2} f(z)\,dz \to \int\limits_0^{+\infty} z^{s-1}e^{iz}\,dz \quad \text{i } \int_{l_1} f(z)\,dz \to -\Gamma(s)e^{\frac{i\pi s}{2}}.$$

Kako je

$$\int_l f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz = 0,$$

puštajući da $R \to +\infty$ i $r \to 0$, zbog $(\Delta 1)$ i $(\Delta 2)$ dobijamo da je
$\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{ix}dx = \Gamma(s)e^{\frac{i\pi s}{2}}$.
Poslednja jednakost ekvivalentna je sa jednakošću:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}\cos(x)\,dx \ \pm\ i \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}\sin(x) = \Gamma(s)\Big(\cos\tfrac{\pi s}{2} \pm i\sin\tfrac{\pi s}{2}\Big),$$

odakle dobijamo da je $\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-ix}dx = \Gamma(s)e^{\frac{-i\pi s}{2}}$.

Uvodeći u integralu $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n}\,dx$ smenu $x^n = t$ $(dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt)$, integral postaje

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n}\,dx \ = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-2}\ \sin t\,dt,$$

odakle parcijalnom integracijom uzimajući $u = \sin t$ i $dv = t^{\frac{1}{n}-2}\,dt$, dobijamo da je $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-1}\cos t\ dt = \frac{1}{1-n}\Gamma(\frac{1}{n})\cos\frac{\pi}{2n}$,
pri čemu poslednja jednakost sledi iz polaznog integrala.

57. Integracijom po četvrtini kruga izračunati vrednost integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4 + x^2 + 1}\,dx.$$

Rešenje. Izvršimo integraciju kompleksne funkcije $f(z) = \frac{\ln z}{z^4 - z^2 + 1}$, po konturi sa slike 20. Na osnovu Cauchyeve teoreme o rezidumima imamo da je $\int_l f(z)dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\,(f; z^*)$, gde je $z^* = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$. Kako je z^* pol prvog reda tada je:

$$\operatorname{Res}(f;z^*) = \lim_{z\to z^*}(z-z^*)f(z) = \tfrac{\pi}{72}(3-\sqrt{3}i).$$

Zbog izgleda konture po kojoj vršimo integraciju važi da je

$$\int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{Ri}^{ri} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz + \int\limits_{r}^{R} f(z)dz = \tfrac{\pi^2}{36}(\sqrt{3}+3i).$$

Puštajući da $R\to+\infty$ i $r\to 0$, obzirom da zbog JORDANovih lema prvi i treći integral teže nuli i uvodeći u drugom integralu smenu $z=xi$, a u četvrtom $z=x$, dobijamo da je:

$$\int\limits_0^{+\infty} \tfrac{lnx}{x^4-x^2+1}\,dx + \tfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} \tfrac{1}{x^4+x^2+1}\,dx - i\int\limits_0^{+\infty} \tfrac{\ln x}{x^4+x^2+1}\,dx = \tfrac{\pi^2}{36}(\sqrt{3}+3i),$$

te izjednačavanjem imaginarnih delova dobijamo da je

$$\int_0^{+\infty} \tfrac{\ln x}{x^4+x^2+1}\,dx = -\tfrac{\pi^2}{12}.$$

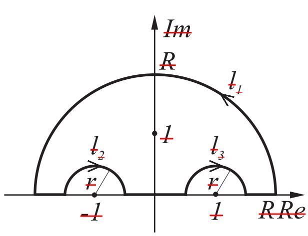
~~Integracija po polovini kruga~~

~~**58.** Metodama kompleksne integracije izračunati vrednost realnih integrala~~

$$(a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{x^2}{x^4-1}\,dx; \qquad (b)\ \int_0^{+\infty} \tfrac{\sin x}{x}\,dx;$$

~~**Rešenje.** (*a*) Izvršimo integraciju kompleksne funkcije~~ $f(z)=\frac{z^2}{z^4-1}$, ~~po konturi~~ l ~~sa slike, unutar koje se nalazi singularitet~~ $z=i$ ~~i koja zaobilazi singularitete~~ $z=\pm1$. ~~Na osnovu CAUCHYeve teoreme o rezidumima važi da je~~

$$\int\limits_{l} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;i).$$



~~*Slika 21.*~~

~~Kako je~~ $z=i$ ~~pol prvog reda, funkcije~~ $f(z)$, ~~ostatak u njoj iznosi~~

$$\operatorname{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\tfrac{z^2}{(z+i)(z^2-1)} = -\tfrac{1}{4}i,$$

~~te dobijamo da je~~ $\int\limits_{l} f(z)\,dz = \frac{\pi}{2}$.

~~Kako je~~ $\lim\limits_{z\to+\infty}\frac{z^3}{z^4-1}=0$, ~~zbog druge JORDANove leme imamo da je~~

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{l_1} f(z)dz = 0.$$

~~Kako~~ $\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\frac{z^2}{z^4-1} = -\frac{1}{4}$, ~~tada je zbog treće JORDANove leme~~

Integracija multiformnih funkcija

68. Kompleksnom integracijom izračunati vrednost integrala

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x(2-x)}}{(x+1)(3-x)}\,dx.$$

Rešenje. Izvršimo integraciju funkcije

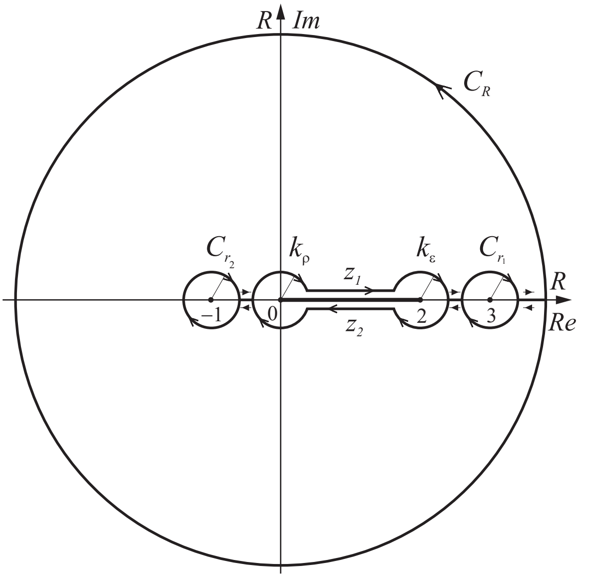
$$f(z)=\frac{\sqrt{z(2-z)}}{(z+1)(3-z)}$$

po konturi sa slike 24, pri čemu se krećemo pozitivno, polazeći iz tačke R na realnoj osi, a nakon obilaska kružnice C_R prvo se krećemo po krivoj u donjoj, a zatim u gornjoj poluravni (u smeru naznačenih strelica). Indeksi kružnica označavaju njihove poluprečnike. Kako funkcija $f(z)$ ima dve algebarske tačke grananja drugog reda, i to $z=0$ i $z=2$, povucimo zasek koji spaja te tačke. Uzmimo da je na gornjem zaseku z_1 argument tačaka jednak 0, a na donjem z_2 jednak 2π. Tada je moguće odabrati jednu regularnu granu funkcije

$$g(z)=\sqrt{z(2-z)},$$

na skupu $\mathbf{C}\backslash[0,2]$. Odaberimo granu funkcije koja je određena sa

$$g(-1)=\sqrt{3}i.$$



Slika 24.

Zbog osobine aditivnosti integrala imamo da je

$$\int_{C_R} f(z)dz+\int_{C_{r_1}} f(z)dz+\int_{k_\varepsilon} f(z)dz+\int_{z_1} f(z)dz+\int_{k_\rho} f(z)dz+\int_{C_{r_2}} f(z)dz+\int_{z_2} f(z)dz=0.$$

Zbog treće JORDANove leme iz $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = 0$ i $\lim\limits_{z\to 2}(z-2)f(z) = 0$ dobijamo da je

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{k_\rho} f(z)\,dz = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{k_\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

Kako je

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \tfrac{\sqrt{3}i}{4} \;\; \text{i} \;\; \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \tfrac{\sqrt{3}i}{4},$$

tada zbog treće JORDANove leme važi da je

$$\lim_{r_2\to 0}\int_{C_{r_2}} f(z)\,dz = \tfrac{\sqrt{3}\pi}{2} \;\; \text{i} \;\; \lim_{r_1\to 0}\int_{C_{r_1}} f(z)\,dz = \tfrac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$

Kako je na gornjem zaseku $z = x$ tada je $\int\limits_{z_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\rho}^{2-\varepsilon} f(x)\,dx$, a na donjem zaseku imamo da je $z = xe^{2\pi i}$, te je $\int\limits_{z_2} f(z)\,dz = -\int\limits_{2-\varepsilon}^{\rho} f(x)\,dx$. Razvijmo funkciju $f(z)$ u LAURENTov red u okolini $z = \infty$. Imamo da je za svako $x > 2$ zadovoljeno da je $g(x) = -i\sqrt{x(x-2)}$, te za $x > 2$ imamo da je

$$f(x) = \tfrac{i}{x}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{(1+\frac{1}{x})(1-\frac{3}{x})} = \tfrac{i}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}\left(\tfrac{-2}{x}\right)^n \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\tfrac{1}{x}\right)^n \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac{3}{x}\right)^n.$$

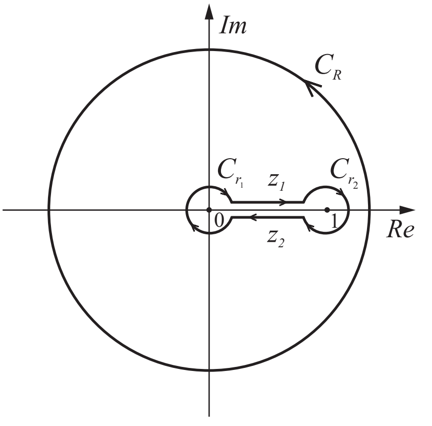
Zbog jedinstvenosti LAURENTovog razvoja analitičke funkcije prethodni razvoj važi za svako z iz okoline beskonačnosti te je $\mathrm{Res}\,(f;\infty) = -i$, odakle dobijamo da je $\int_{C_R} f(z)dz = -2\pi i\mathrm{Res}\,(f;\infty) = -2\pi$. Puštajući u gornjoj jednakosti da $r_1, r_2, \varepsilon, \rho \to 0$, a $R\to\infty$ dobijamo da je

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

69. Kompleksnom integracijom izračunati vrednost integrala

$$\int_0^1 \sqrt{x^3-x^4}\,dx.$$

Rešenje. Izvršimo integraciju funkcije $f(z) = \int\limits_0^1 \sqrt{x^3 - x^4}\, dx$ po konturi sa slike. Neka je zasek povučen između tačaka $z = 0$ i $z = 1$, duž realne ose. Odaberimo regularnu granu funkcije $f(z)$, na skupu $\mathbf{C}\backslash[0,1]$, koja je određena argumentom 0 na gornjem, a 2π na donjem zaseku. Za ovako odabranu granu funkcije imamo da je $f(-1) = -i\sqrt{2}$. Na osnovu teoreme 7, imamo da je



$$\int\limits_{C_R} f(z)\, dz + \int\limits_{C_{r_2}} f(z)\, dz + \int\limits_{z_2} f(z)\, dz + \int\limits_{C_{r_1}} f(z)\, dz + \int\limits_{z_1} f(z)\, dz = 0.$$

Zbog treće JORDANove leme važi da je

$$\lim_{r_1 \to 0} \int\limits_{C_{r_1}} f(z)\, dz = 0 \text{ i } \lim_{r_2 \to 0} \int\limits_{C_{r_2}} f(z)\, dz = 0.$$

Kako je za svako $R > 1$

$$\int\limits_{C_R} f(z)\, dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f; \infty),$$

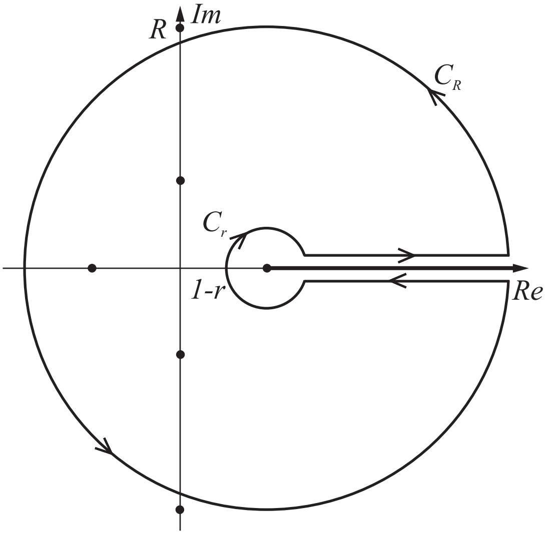
odredimo ostatak funkcije f u beskonačnosti. Uočimo da za svako $x > 1$ i za odabranu granu funkcije važi da je $f(x) = -i\sqrt{x^4 - x^3}$. LAURENTov red ima oblik

$$f(x) = -ix^2\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = -ix^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{-1}{x}\right)^n,$$

odakle, uzimajući da je $n = 3$, dobijamo da koeficijent LAURENTovog reda uz $\frac{1}{x}$ iznosi $\frac{i}{16}$, te je $\operatorname{Res}(f; \infty) = -\frac{i}{16}$. Kako za tačke zaseka z_1 imamo da je $z = x$, a za tačke zaseka z_2 da je $z = xe^{2i\pi}$, puštajući da $r_1, r_2 \to 0$, a $R \to +\infty$, dobijamo da je $\int\limits_0^1 \sqrt{x^3 - x^4}\, dx = \frac{\pi}{16}$.

70. Izračunati vrednost integrala $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^4-1}\, dx$.

Rešenje. Izvršimo integraciju funkcije $f(z) = \frac{\sqrt{z-1}}{z^4-1}$ po konturi sa slike. Označimo sa $g(z) = \sqrt{z-1}$. Tačke $z = 1$ i $z = \infty$ su algebarske tačke grananja drugog reda funkcije $f(z)$. Povucimo zasek od tačke 1 do $+\infty$, duž realne ose i izvršimo integraciju one grane funkcije $f(z)$ za koju je $g(-2) = \sqrt{3}i$. Konačni singulariteti funkcije $f(z)$ su $\pm i$ i -1 i obuhvaćeni su konturom.



Slika 25.

Na osnovu teoreme 17 imamo da je

$$\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{1+R}^{1+r} f(z)\,dz + \int_{C_r} f(z)\,dz + \int_{1+r}^{1+R} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f;i) + \mathrm{Res}\,(f;-i) + \mathrm{Res}\,(f;-1)).$$

Kako je $\lim_{z\to\infty} \frac{(z-1)\sqrt{z-1}}{z^4-1} = \lim_{z\to\infty} \frac{\sqrt{z-1}}{(z+1)(z^2+1)} = 0$ na osnovu druge JORDANove leme dobijamo da je $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$. Slično, na osnovu treće JORDANove leme dobijamo da je $\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)\,dz = 0$. U drugom integralu gornje jednakosti važi da je $z = xe^{i2\pi}$, a u četvrtom integralu je $z = x$. Zbog odabrane grane funkcije imamo da je

$$\sqrt{xe^{i2\pi} - 1} = -\sqrt{x-1},$$

pri čemu prethodna jednakost važi za tačke sa donjeg zaseka. Puštajući u polaznoj jednakosti da $R \to +\infty$, a $r \to 0$ dobijamo da je

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^4-1}\,dx = \pi i(\mathrm{Res}\,(f;i) + \mathrm{Res}\,(f;-i) + \mathrm{Res}\,(f;-1)).$$

Za nalaženje ostataka u singularnim tačkama potrebno je da odredimo vrednosti funkcije $g(z)$ u tim tačkama. Kao u zadatku 10, odeljak 1.1, nalazimo da je $g(-1)=\sqrt{2}i$, $g(i)=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3}{8}\pi}$ i $g(-i)=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{5}{8}\pi}$. Kako su singulariteti polovi prvog reda imamo da je

$$\operatorname{Res}(f;z_j)=\lim_{z\to z_j}\left(\frac{z-z_j}{z^4-1}\sqrt{z-1}\right),$$

gde su sa z_j $(j=1,2,3)$ označeni singulariteti funkcije. Zbog prethodnog dobijamo da je

$\operatorname{Res}(f;-1)=-\frac{\sqrt{2}}{4}i$, $\operatorname{Res}(f;i)=i\frac{\sqrt[4]{2}}{4}e^{\frac{3}{8}\pi}$ i $\operatorname{Res}(f;-i)=-i\frac{\sqrt[4]{2}}{4}e^{\frac{5}{8}\pi}$.
Dobijamo da je zbir ostataka na desnoj strani prethodne jednakosti

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}i+i\frac{\sqrt[4]{2}}{i}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

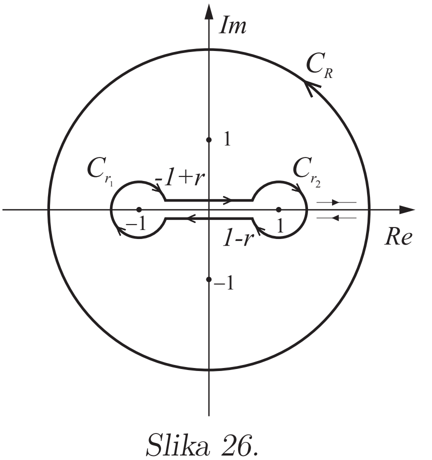
pri čemu smo koristili adicione veze $\sin\frac{3}{8}\pi=\sin\frac{5}{8}\pi$, $\cos\frac{3}{8}\pi=-\cos\frac{5}{8}\pi$ i $\cos\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Konačno, vrednost traženog integrala je

$$\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt[4]{2}}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

71. Izračunati vrednost integrala

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4}}{1+x^2}\,dx.$$

Rešenje. Izvršimo transformaciju podintegralne funkcije sa $\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4}=(1-x)\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$. Izvršimo integraciju funkcije $f(z)=\frac{1-z}{1+z^2}\sqrt[5]{\frac{1+z}{1-z}}$ po konturi sa slike 26. Kako su tačke ±1, algebarske tačke grananja petog reda, zasek je povučen između njih duž realne ose. Označimo sa $g(z)=\sqrt[5]{\frac{1+z}{1-z}}$. Na osnovu zadatka 9 iz odeljka 1.1, i odabranu onu granu funkcije g za koju je $g(-2)=\frac{1}{\sqrt[5]{3}}e^{i\frac{\pi}{5}}$, dobijamo da je $g(i)=e^{i\frac{\pi}{10}}$ i $g(-i)=e^{i\frac{3\pi}{10}}$. Kako na



Slika 26.

osnovu JORDANovih lema imamo da je $\lim\limits_{r_i\to 0}\int\limits_{C_{r_i}} f(z)\,dz = 0$ $(i = 1,2)$, zbog CAUCHYeve teoreme o rezidumima, dobijamo da je

$$(\Sigma)\quad \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int\limits_{1-r}^{-1+r} f(z)\,dz + \int\limits_{-1+r}^{1-r} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right)$$

$$= 2\pi i(\operatorname{Res}(f;i) + \operatorname{Res}(f;-i)).$$

Kako su $\pm i$ polovi pvog reda imamo da je

$$\operatorname{Res}(f;i) = -\tfrac{1}{2}(i+1)e^{i\frac{\pi}{10}} \quad \text{i} \quad \operatorname{Res}(f;-i) = \tfrac{1}{2}(i-1)e^{i\frac{3\pi}{10}}.$$

Uočimo da za svako $x > 1$ imamo da je $g(x) = e^{i\frac{\pi}{5}}\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}$, te LAURENTov red funkcije $f(x)$, u okolini beskonačnosti, glasi

$$f(x) = e^{i\frac{\pi}{5}}\frac{1-x}{1+x^2}\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} = e^{i\frac{\pi}{5}}\frac{-(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x^2})}\cdot\frac{(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}}}{(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{5}}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{x^k}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{j}\left(-\frac{1}{2}\right)^j\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1}{l}\frac{1}{x^{2l}}.$$

Zbog jedinstvenosti LAURENTovog razvoja analitičke funkcije navedeni razvoj važi za svako z iz okoline beskonačnosti, odakle za $k = j = l = 0$ dobijamo da je koeficijent uz element razvoja $\frac{1}{z}$ jednak $-e^{i\frac{\pi}{5}}$, te je $\operatorname{Res}(f;\infty) = e^{i\frac{\pi}{5}}$. Iz dobijenog sledi da je $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)\,dz = -2\pi i e^{i\frac{\pi}{5}}$.

Kako je prvi od integrala u jednakosti (Σ) po donjem zaseku, na kome je $z = xe^{2\pi i}$, tada je funkcija pod integralom $f(z) = e^{i\frac{2\pi}{5}}f(x)$.

Zamenom dobijenih rezultata u jednakost (Σ) dobijamo da je

$$\left(1-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\pi i\left(e^{i\frac{\pi}{5}} - \frac{1}{2}(i+1)e^{i\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{2}(i-1)e^{i\frac{3\pi}{10}}\right).$$

Primenom adicionih formula dobijamo da je $1 - e^{i\frac{2\pi}{5}} = -2i\sin\frac{\pi}{5}e^{i\frac{\pi}{5}}$, odakle zamenom u prethodu jednakost dobijamo da je vrednost traženog integrala

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}\left(-1+\cos\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{10}\right).$$

Integracija po pravougaoniku

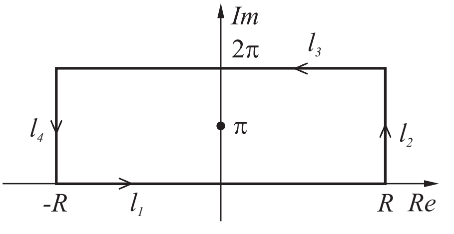
Po pravougaoniku najčešće integralimo funkcije koje predstavljaju količnike eksponenciajalnih, trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija.

72. Izračunati vrednost integrala

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx, \quad b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx,$$

za $a, b \in (0,1)$.

Rešenje. a) Izvršimo integraciju funkcije $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ po konturi sa slike 27. Kako je $z = \pi i$ pol prvog reda imamo da je $\mathrm{Res}\,(f;\pi i) = -e^{a\pi i}$. Kako je $z = x$ na krivoj l_1, na krivoj l_2 imamo da je $z = R + iy$, na krivoj l_3 z ima oblik $z = x + 2\pi$, a na krivoj l_4 važi da je $z = -R + iy$, na osnovu CAUCHYeve teoreme o rezidumima imamo da je



Slika 27.

$$\int_{-R}^{R} \tfrac{e^{ax}\,dx}{1+e^x} + i\int_{0}^{2\pi} \tfrac{e^{a(R+iy)}\,dy}{1+e^{R+iy}} + \int_{R}^{-R} \tfrac{e^{a(x+2\pi i)}\,dx}{1+e^{x+2\pi i}} + i\int_{2\pi}^{0} \tfrac{e^{a(-R+iy)}\,dy}{1+e^{-R+iy}} = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Kako je zbog osobina modula

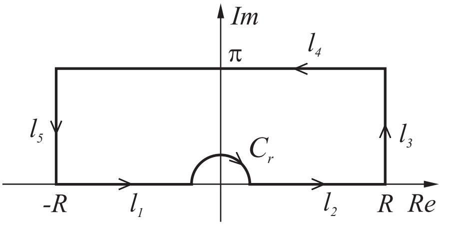
$$\left| i\int_{0}^{2\pi} \tfrac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\,dy \right| \le 2\pi \tfrac{e^{aR}}{e^R-1} \quad \text{i} \quad \left| i\int_{2\pi}^{0} \tfrac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\,dy \right| \le 2\pi \tfrac{e^{-aR}}{1-e^{-R}},$$

puštajući da $R \to +\infty$, iz gornje jednakosti dobijamo da je

$$(1-e^{2a\pi i}) \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i e^{a\pi i},$$

odnosno $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

b) Za dobijanje rezultata, treba izvršiti integraciju funkcije $f(z) = \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^z}$, po konturi sa slike 28. Kako je $\lim_{z\to 0} f(z) = b-a$, zaključujemo da tačku $z=0$ nije bilo neophodno zaobilaziti jer je reč o konačnom otklonjivom singularitetu i važi da je $\lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r} f(z)\,dz = 0$,



Slika 28.

te je integraciju moguće izvršiti i po konturi sa slike 29. Na osnovu prve CAUCHY-GOURSATove teoreme, dobijamo da je

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{\pi i} f(R+y)\,dy + \int\limits_{R}^{-R} f(x+\pi i)\,dx + \int\limits_{\pi i}^{0} f(-R+y)\,dy = 0$$

Kako je

$$\left|\int\limits_{0}^{\pi i} f(R+y)\,dy\right| \le \pi\frac{e^{aR}+e^{bR}}{1-e^R} \quad \text{i} \quad \left|\int\limits_{\pi i}^{0} f(-R+y)\,dy\right| \le \pi\frac{e^{-aR}+e^{-bR}}{1-e^{-R}},$$

puštajući da $R\to+\infty$ dobijamo iz prethodnog da je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx - e^{a\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx + e^{b\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bx}}{1+e^x}\,dx = 0.$$

Koristeći rezultat zadatka pod a), dobijamo da je vrednost integrala

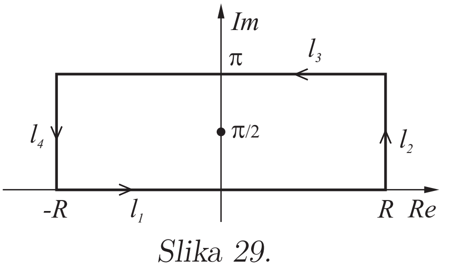
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx = \pi(\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi).$$

73. Izračunati vrednost integrala $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} x}\,dx$ za $|a|<1$.

Rešenje. Izvršićemo integraciju funkcije $f(z) = \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}$, po konturi sa slike 29. Tačka $z = \frac{\pi}{2}i$ je pol prvog reda funkcije $f(z)$ i imamo da je

$$\operatorname{Res}(f; \tfrac{\pi}{2}i) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i} (z-\tfrac{\pi}{2}i)f(z) = -ie^{a\frac{\pi}{2}i}.$$

Na osnovu prve CAUCHYeve teoreme o rezidumima, važi da je



Slika 29.

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ax}\,dx}{\mathrm{ch}\,x} + i\int\limits_{0}^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}\,dy}{\mathrm{ch}\,(R+iy)} + \int\limits_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)}\,dx}{\mathrm{ch}\,(x+\pi i)} + i\int\limits_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}\,dy}{\mathrm{ch}\,(-R+iy)} = 2\pi e^{a\frac{\pi}{2}i}.$$

Kako je $|\mathrm{ch}\,(R+iy)| = \left|\frac{e^{R+iy}+e^{-R-iy}}{2}\right| \geq \frac{1}{2}(e^R - e^{-R})$, slično kao u prethodnom zadatku zaključujemo da drugi integral iz prethodne jednakosti teži nuli kada $R \to +\infty$. Na sličan način pokazujemo da i četvrti integral teži nuli. Puštajući da R teži $+\infty$, dobijamo da je

$$(1 + e^{a\pi i}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\mathrm{ch}\,x}\,dx = 2\pi e^{a\frac{\pi}{2}}i,$$

odnosno,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\mathrm{ch}\,x}\,dx = \frac{2\pi e^{a\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{a\pi i}} = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}a)}.$$

Razdvajanjem poslednjeg integrala na dva integrala

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{\mathrm{ch}\,x}\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\mathrm{ch}\,x}\,dx = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}a)}$$

i zamenom x sa $-x$ u prvom integralu dobijamo da je

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\mathrm{ch}\,x}\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\mathrm{ch}\,x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\,ax}{\mathrm{ch}\,x}\,dx = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}a)},$$

odakle sledi rezultat.

Zadaci za vežbu

20. Izračunati vrednost integrala

$$\int\limits_{0}^{\pi} (2\cos x)^{n+k} \cos(n-k)x\,dx \quad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Rezultat. $\pi \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$

21. Izračunati vrednosti integrala:

$$(a) \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}, \quad (a > 1) \qquad (b) \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad (|a| < 1)$$

$$(c)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x dx}{1-2a\cos x+a^2},\quad (|a|>1)\qquad (d)\ \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x+a)\,dx\quad (\operatorname{Im} a\neq 0).$$

Rezultat. (a) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, (b) $\frac{2\pi}{1-a^2}$, (c) $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$, (d) $-2\pi i\,\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} a)$.

22. Izračunati vrednost integrala $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax^2-\sin ax^2}{1+x^4}\,dx \quad (a>0)$.

Rezultat. Integraliti funkciju $f(z)=\frac{e^{iaz^2}}{1+z^4}$ po četvrtini kruga. Dobija se vrednost integrala $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-a}$.

23. Integracijom funkcije $\frac{e^{i\alpha z}}{z+\beta}$ po četvrtini kruga, dokazati da važi

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x+\beta}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{xe^{-\alpha\beta x}}{1+x^2}\,dx.$$

24. Integracijom po polovini kruga izračunati vrednost realnih integrala:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^4+x^2+1},\qquad (b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Rezultat. (a) $\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6})$, (b) $\frac{7}{50}\pi$.

25. Integracijom po polukrugu dokazati da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[p(x-a)]\sin[q(x-b)]\,dx}{\pi(x-a)(x-b)} = \frac{\sin[p(a-b)]}{a-b},$$

za $q\geq p>0$.

26. Integracijom po polovini kruga izračunati vrednost realnih integrala:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x}{x^4-1}\,dx, \quad (b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx \ \ (a \neq 0).$$

Rezultat. (a) $\frac{\pi^2}{8}$, (b) $\frac{\pi}{2a}\ln a$.

27. Integracijom po punom krugu izračunati vrednost realnih integrala:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad (b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\ln x}{x^2+1}dx.$$

Rezultat. (a) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$, (b) $\frac{1}{6}\pi^2$.

28. Integracijom po punom krugu izračunati vrednost realnog integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+\pi^2)}.$$

Rezultat. $\frac{\pi}{2a\left(\ln^2 a+\frac{\pi^2}{4}\right)} - \frac{1}{1+a^2}$.

Uputstvo. Integraliti funkciju $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}\ \frac{1}{\ln z-\pi i}$.

29. Izračunati vrednost realnog integrala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{\frac{x}{2}}(e^{2x}+a^2)^2}.$$

Rezultat. Uvesti smenu $e^x = t$. Rešenje je $\frac{\pi}{2a^3\sqrt{2a}}\left(\frac{3}{2}\ln a-1-\frac{3}{4}\pi\right)$.

30. Kompleksnom integracijom multiformnih funkcija izračunati vrednost realnih integrala:

$$(a)\ \int_0^2 \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3}\,dx, \quad (b)\ \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{4x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\,dx,$$

$$(c)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(2x+1)^2(x+2)}\,dx, \quad (d)\ \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[7]{(x-1)^3(2-x)^4}}.$$

Rezultat.
(a) $\pi(4-\sqrt{15})$, (b) $\frac{1}{6\sqrt{3}}$, (c) $\frac{\pi}{18}(3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$, (d) $\frac{\pi}{\sqrt[7]{16}\sin\frac{3\pi}{7}}$.

31. Izračunati vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{(a-bx)\sqrt{x(1-x)}},$$

za $a > b > 0$.

Rezultat. $\frac{\pi}{\sqrt{a(a-b)}}$.

32. Kompleksnom integracijom izračunati vrednost integrala

$$\int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{\alpha-1} \frac{dx}{x},$$

za $0 < a < b$ i $0 < \alpha < 2$.

Rezultat. $\pi\frac{(\frac{b}{a})^{\alpha-1}-1}{\sin\pi(\alpha-1)}$.

33. Integracijom multiformnih funkcija odrediti vrednost integrala

$$a)\ \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{(x+a)^2}, \quad \text{za } \ -1 < p < 1,\ a > 0.$$

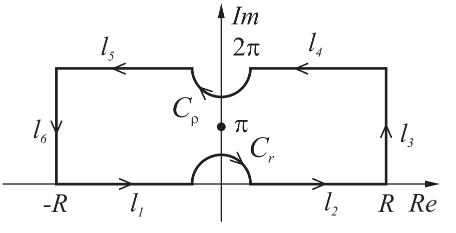
$$b) \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx, \quad \text{za} \quad -1 < p < 2.$$

Rezultat. $a)\ \frac{p\pi\, a^{p-1}}{\sin(p\pi)(1+a)^{p+1}}$ $\ b)\ \frac{\pi}{\sin(p\pi)}\Big(\sin\frac{p\pi}{2} + \cos\frac{p\pi}{2} - 1\Big).$

34. Integracijom po pravougaoniku izračunati vrednost integrala

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,dx, \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{x\cos ax}{\operatorname{sh} x}\,dx.$$

Rezultat. Integraciju izvršiti po konturi sa slike 30 i to u slučaju a) integraliti funkciju $f(z) = \frac{e^{iaz}}{\operatorname{sh} z}$, a u slučaju b) funkciju $f(z) = \frac{ze^{iaz}}{\operatorname{sh} z}$. Rezultat pod a) iskoristiti za nalaženje rezultata pod b). Dobijamo da je rezultat



Slika 30.

$a)\ \frac{\pi}{2}\operatorname{tgh}\frac{\pi a}{2}, \quad b)\ \frac{\pi^2 e^{\pi a}}{(e^{\pi a}+1)^2}.$

1.7 Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti tačke grananja i konstruisati RIEMANNove površi funkcija $a)\ f(z) = \operatorname{Ln}(\sqrt[n]{z} - 1), \quad b)\ f(z) = \sqrt[n]{\sqrt[m]{z} - 1}, \quad m, n \in \mathbf{N}.$

2. Odrediti regularnu funkciju $f(z)$ čiji je modul $|f(z)| = e^{x^2-y^2+3x}$, u zatvorenom obliku, gde je $z = x + iy$.

3. Ispitati da li postoji regularna funkcija $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, čiji je realan deo funkcija oblika

$$u(x,y) = h\Big(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\Big),$$

gde je h dva puta diferencijabilna funkcija koju treba odrediti, i ako postoji, odrediti je u zatvorenom obliku.

4. Ispitati da li postoji regularna funkcija čiji je realni deo

$$u(x,y) = \varphi(x + \sqrt{x^2+y^2}),$$

gde je φ nepoznata funkcija, koju treba odrediti.

5. Dokazati da je funkcija

$$v(x,y;t) = \tfrac{y}{(x-t)^2+y^2} \quad (t \in \mathbf{R})$$

harmonijska za svako $(x,y) \neq (t,0)$, a zatim odrediti regularnu funkciju $f(z;t)$ čiji je ona imaginaran deo, koja ispunjava uslov $|f(z;t)| \to 0$, kada $|z| \to +\infty$.

6. a) Odrediti konstante a i b, tako da funkcija

$$f(z,a) = \frac{a+bz}{z-a}$$

u svim tačkama kruga $|z| = 1$ ima realni deo

$$\tfrac{1-a^2}{1-2a\cos t+a^2},$$

a zatim odrediti sliku one četvrtine kruga $|z| = 1$ koja pripada prvom kvadrantu, funkcijom $f(z,1)$.
b) Odrediti singularitete funkcije $\ln(f(z,1))$.

7. Funkcijom

$$f(z) = \tfrac{1+z^3-i(1-z^3)}{1+z^3+i(1-z^3)},$$

preslikati oblast

$$\left\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \geq 1,\ 0 \geq \arg(z) \geq \tfrac{\pi}{3}\right\}.$$

Precizno ispitati preslikavanja ruba oblasti D.

8. Na šta se preslikava

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$

funkcijom $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

9. a) Odrediti singularitete funkcije

$$f(z) = \tfrac{\sqrt{z}}{z^5+1}$$

i ispitati njihovu prirodu.

b) Integracijom po punom krugu izračunati $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^5+1}$.

10. Data je funkcija $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}}$.
a) Odrediti singularitete funkcija

$$f(z), \quad \frac{1}{f(z)}, \quad f'(z), \quad \text{i} \quad \ln f(z).$$

i ispitati njihovu prirodu
b) Izračunati vrednost određenog integrala $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.
b) Funkciju $f(z)$ predstaviti LAURENTovim redom u okolini $z = i$, za različito odabrane grane funkcije.

11. a) Na šta se preslikava jedinični krug i pojedini njegovi delovi funkcijom $g(z) = \frac{z}{z^3+\sqrt{z}}$.
b) Odrediti singularitete svih grana ove funkcije i ispitati njihovu prirodu.
c) Povlačeći zasek duž negativnog dela realne ose izračunati integral funkcije $f(z) = \frac{g(z)}{z+a}$, za $a < 0$ duž kruga $|z| = R$ i odrediti vrednost realnih integrala koji se dobijaju, puštajući da $R \to +\infty$.

12. Data je funkcija

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+z} - e^{-z}\right).$$

a) Odrediti singularitete funkcije.
b) Funkciju $f(x)$ razviti u okolini tačke $z = -1$ u LAURENTov red.
c) Pokazati da je

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right)\frac{dx}{x} = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x}.$$

13. Data je funkcija

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}.$$

a) Odrediti singularitete funkcija $f(z), \quad f'(z)$.
b) Izračunati integral

$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin nx}{(1+x^2)\sin x}\,dx.$$